



۷  
۳۵

**فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر**  
پاسخنامه فصل اول

۴۷  
۷۱

**فصل دوم: هندسه**  
پاسخنامه فصل دوم



۸۳  
۱۰۳

**فصل سوم: تابع**  
پاسخنامه فصل سوم

۱۱۸  
۱۴۹

**فصل چهارم: مثلثات**  
پاسخنامه فصل چهارم



۱۶۱  
۱۸۲

**فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی**  
پاسخنامه فصل پنجم

۱۹۲  
۲۱۳

**فصل ششم: حد و پیوستگی**  
پاسخنامه فصل ششم



۲۲۷  
۲۴۰

**فصل هفتم: آمار و احتمال**  
پاسخنامه فصل هفتم

۲۴۸

**امتحان‌های نیم‌سال اول**

۲۵۲

پاسخنامه امتحان‌های نیم‌سال اول

۲۶۰

**امتحان‌های نیم‌سال دوم**

۲۶۸

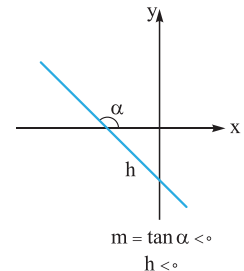
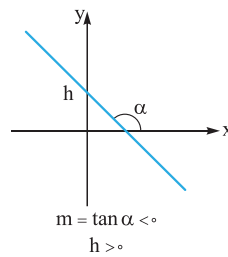
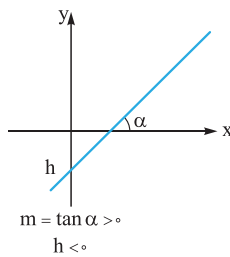
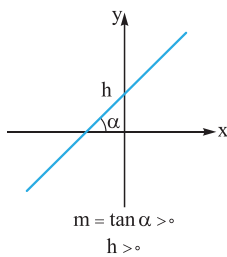
پاسخنامه امتحان‌های نیم‌سال دوم



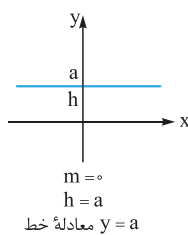
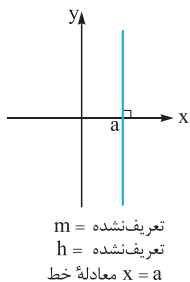
## هندسه تحلیلی



**معادله خط راست** معادله هر خط راست به شکل  $y = mx + h$  است (یعنی یک معادله درجه اول بر حسب  $x$  و  $y$ ) که در این رابطه  $m$  شیب خط و  $h$  عرض از مبدأ آن است.



شیب خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد اگر زاویه حاده باشد  $m > 0$  و اگر این زاویه منفرجه باشد  $m < 0$  است.



عرض از مبدأ خط برابر عرض نقطه‌ای است که خط در آن، محور عرض‌ها را قطع می‌کند. در حالتی که خط موازی محور عرض‌ها است شیب و عرض از مبدأ خط تعریف نشده‌اند و در حالتی که خط موازی محور طول‌ها است  $m = 0$  است و  $h$  ممکن است هر عدد دلخواه باشد. اگر در معادله خط  $h = 0$  باشد، خط از مبدأ مختصات عبور می‌کند. یعنی خط به معادله  $y = mx$  از مبدأ مختصات عبور می‌کند.

## نوشتن معادله خط

برای نوشتن معادله خط دو حالت در نظر می‌گیریم:

❶ اگر شیب ( $m$ ) و مختصات یک نقطه  $A(x_1, y_1)$  از خط را داشته باشیم معادله را به یکی از دو روش زیر می‌نویسیم:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{یا} \quad y = mx + h$$

❷ اگر مختصات دو نقطه از خط  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  را داشته باشیم معادله را به یکی از دو صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ y - y_1 = m(x - x_1) \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ y = mx + h \end{cases}$$

## مثال و پاسخ

**مثال:** معادله خطی را بنویسید که از نقطه  $(2, 5)$  بگذرد و با محور طول‌ها زاویه  $45^\circ$  بسازد.

**پاسخ:** شیب خط برابر  $m = \tan 45^\circ = 1$  است پس:

**روش اول:**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = 1(x - 2)$$

$$y = x - 2 + 5$$

$$y = x + 3$$

$$y = mx + h$$

$$y = x + h$$

$$(2, 5) \Rightarrow 5 = 2 + h \Rightarrow h = 3$$

$$y = x + 3$$

معمولاً روش دوم روش سریع‌تری است و خیلی وقت‌ها بعد از نوشتن  $y = mx$  با جاگذاری مقادیر  $x$  و  $y$  نقطه می‌توانیم  $h$  را به طور مستقیم حساب کنیم.

## مثال و پاسخ

**مثال:** سه نقطه  $A(2, 3)$ ،  $B(5, 3)$  و  $C(2, 1)$  سه رأس یک مثلث‌اند. معادله اضلاع مثلث را بنویسید.

**پاسخ:** باید معادله  $AB$  و  $AC$  و  $BC$  را بنویسیم:

$$A \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \right., \quad B \left| \begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \end{smallmatrix} \right. \Rightarrow m = \frac{3-3}{5-2} = 0 \Rightarrow y = 3 \quad \text{معادله } AB$$

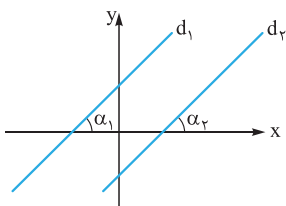
$$A \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \right., \quad C \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right. \Rightarrow \frac{3-1}{2-2} = \text{تعریف نشده} \Rightarrow x = 2 \quad \text{معادله } AC$$

$$B \left| \begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \end{smallmatrix} \right., \quad C \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right. \Rightarrow m = \frac{1-3}{2-5} = \frac{2}{3} \Rightarrow y - 1 = \frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} + 1 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \quad \text{معادله } BC$$

**نکته:** همان‌طور که در مثال بالا دیدید معادله خط گذرنده از نقطه هم‌عرض به شکل  $A \left| \begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix} \right.$  و  $B \left| \begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix} \right.$  به شکل  $y = y_1$  و معادله خط گذرنده از دو نقطه هم طول به شکل  $A \left| \begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix} \right.$  و  $B \left| \begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix} \right.$  به شکل  $x = x_1$  است.

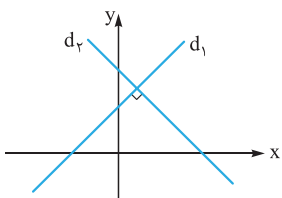
## خط عمودی و موازی

۱ اگر دو خط با هم موازی باشند شیب‌هایشان با هم برابر است.



$$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow m_1 = m_2$$

۲ اگر دو خط بر هم عمود باشند، شیب هر کدام عکس قرینه شیب دیگری است، یعنی حاصل ضرب شیب‌هایشان برابر  $-1$  است.



$$d_1 \perp d_2 \Rightarrow \begin{cases} m_1 m_2 = -1 \\ \text{یا} \\ m_1 = -\frac{1}{m_2} \end{cases}$$

**نکته:** در حالتی که شیب خط صفر یا تعریف نشده است می‌گوییم:

دو خط به معادله‌های  $x = a$  و  $y = b$  بر هم عمودند چون یکی موازی محور  $y$ ها (اولی) و دیگری موازی محور  $x$ ها (دومی) است.

## مثال و پاسخ

**مثال:** چهار خط با معادله‌های زیر مفروض اند:

$$d_1: 3x - 2y = 4$$

$$d_2: y = -\frac{2}{3}x + 1$$

$$d_3: 6y + 4x = -1$$

$$d_4: y = \frac{3}{4}x + 5$$

تعیین کنید هر کدام از جفت خط‌های زیر نسبت به هم چه وضعی دارند:

$$d_1, d_3$$

$$d_2, d_3$$

$$d_1, d_4$$

$$d_1, d_2$$

**پاسخ:** اول شیب هر کدام از خط‌ها را به دست می‌آوریم:

$$d_1: 3x - 2y = 4 \Rightarrow -2y = -3x + 4 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 2 \Rightarrow m_1 = \frac{3}{2}$$

$$d_2: y = -\frac{2}{3}x + 1 \Rightarrow m_2 = -\frac{2}{3}$$

$$d_3: 6y + 4x = -1 \Rightarrow 6y = -4x - 1 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6} \Rightarrow m_3 = -\frac{2}{3}$$

$$d_4: y = \frac{3}{4}x + 5 \Rightarrow m_4 = \frac{3}{4}$$

حالا وضعیت خط‌ها را با توجه به شیبشان تعیین می‌کنیم:

**الف**  $d_1, d_2 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$  بر هم عمودند

**ب**  $d_1, d_4 \Rightarrow m_1 = m_4$  با هم موازی‌اند

**پ**  $d_2, d_3 \Rightarrow m_2 = m_3$  با هم موازی‌اند

**ت**  $d_3, d_4 \Rightarrow m_3 \cdot m_4 = -1$  بر هم عمودند

## مثال و پاسخ

**مثال:** مقدار  $a$  را طوری پیدا کنید که خط گذرنده از دو نقطه  $A(2, 3)$  و  $B(5, 3)$  و خط  $(a+1)x + (a-2)y = 2a+1$ :

**الف** با هم موازی باشند

**ب** بر هم عمود باشند.

**پاسخ:** شیب خط گذرنده از دو نقطه  $A(2, 3)$  و  $B(5, 3)$  برابر صفر است یعنی خط گذرنده از  $A$  و  $B$  موازی محور  $x$ ها است پس:

**الف** خط  $(a+1)x + (a-2)y = 2a+1$  هم باید موازی محور  $x$ ها باشد پس  $a+1=0$  یعنی  $a=-1$ .

**ب** خط  $(a+1)x + (a-2)y = 2a+1$  باید موازی محور  $y$ ها باشد پس  $a-2=0$  یعنی  $a=2$ .

## مثال و پاسخ

**مثال:** سه نقطه  $A(1, 2)$  و  $B(3, 5)$  و  $C(1, 4)$  سه رأس یک مثلث‌اند. از نقطه  $A$  خطی موازی ضلع  $BC$  رسم می‌کنیم. معادله

این خط را بنویسید.

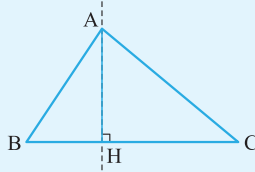
**پاسخ:** چون خط رسم شده (اسمش را می‌گذاریم  $d$ ) موازی  $BC$  است پس شیبش با شیب  $BC$  مساوی است:

$$m_{BC} = \frac{5-4}{3-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_d = \frac{1}{2}$$

$$A(1, 2), m_d = \frac{1}{2} \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \text{معادله خط}$$

## مثال و پاسخ

**مثال:** نقاط  $A(3,1)$  و  $B(2,3)$  و  $C(1,1)$  سه رأس یک مثلث اند. مختصات نقطه  $H$ ، پای ارتفاع  $AH$  را پیدا کنید.



**پاسخ:** اگر یک شکل فرضی برای مثلث  $ABC$  رسم کنیم، نقطه  $H$  محل برخورد ارتفاع  $AH$  و ضلع  $BC$

است. یعنی باید اول معادله ارتفاع  $AH$  را پیدا کنیم و بعد نقطه برخورد  $AH$  و  $BC$  را که همان نقطه  $H$  است به دست آوریم.

$AH$  بر  $BC$  عمود است پس شیبش عکس قرینه  $BC$  است:

$$m_{BC} = \frac{3-1}{2-1} = 2 \Rightarrow m_{AH} = -\frac{1}{2}$$

$$AH \text{ معادله: } A(3,1), m_{AH} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y-1 = -\frac{1}{2}(x-3) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$B(2,3), m_{BC} = 2 \Rightarrow y-3 = 2(x-2) \Rightarrow y = 2x-1$$

حالا معادله  $BC$  را پیدا می‌کنیم:

حالا نقطه برخورد  $BC$  و  $AH$  را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = 2x - 1 \Rightarrow \frac{5}{2} + 1 = 2x + \frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{7}{2} = \frac{5}{2}x \Rightarrow x = \frac{7}{5} \Rightarrow y = \frac{9}{5} \Rightarrow H\left(\frac{7}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

## مثال و پاسخ

**مثال:** مقدار  $m$  را چنان پیدا کنید که دو خط  $3x + 2y = 4$  و  $ax + (2a-1)y = 7$ :

**الف)** با هم موازی باشند.

**ب)** برهم عمود باشند.

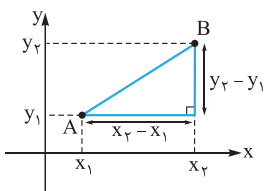
**پاسخ:** اول شیب هر کدام از خط‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$3x + 2y = 4 \Rightarrow 2y = -3x + 4 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 2 \Rightarrow m_1 = -\frac{3}{2}$$

$$ax + (2a-1)y = 7 \Rightarrow (2a-1)y = -ax + 7 \Rightarrow y = \left(-\frac{a}{2a-1}\right)x + \frac{7}{2a-1} \Rightarrow m_2 = \frac{-a}{2a-1}$$

$$\text{حالا داریم: } m_1 = m_2 \Rightarrow -\frac{3}{2} = \frac{-a}{2a-1} \Rightarrow 6a - 3 = 2a \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\text{ب) } m_1 m_2 = -1 \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{-a}{2a-1}\right) = -1 \Rightarrow \frac{3a}{4a-2} = -1 \Rightarrow 3a = -4a + 2 \Rightarrow 7a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{7}$$



**طول پاره‌خط**  $AB$  (یعنی فاصله بین دو نقطه  $A$  و  $B$ ) را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

**چند نکته:**

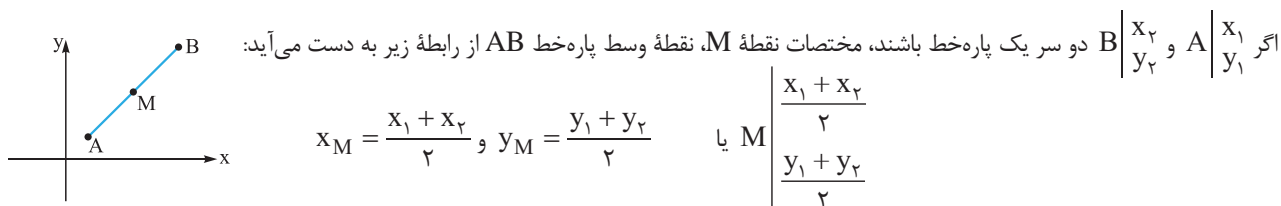
۱) رابطه طول پاره‌خط  $AB$  با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه به دست می‌آید.

۲) اگر  $A\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right)$  و  $B\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)$  باشد (یعنی  $A$  و  $B$  هم‌طول باشند) داریم:  $AB = |y_2 - y_1|$

۳) اگر  $A\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right)$  و  $B\left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right)$  باشد (یعنی  $A$  و  $B$  هم‌عرض باشند) داریم:  $AB = |x_2 - x_1|$

۴) چون مبدأ مختصات  $O(0,0)$  است پس فاصله یک نقطه تا مبدأ مختصات برابر است با  $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$

## نقطه وسط پاره خط



## مثال و پاسخ

**مثال:** نقاط  $A(2, 5)$  و  $B(2, 1)$  و  $C(6, 1)$  سه رأس یک مثلث اند. نوع مثلث را تعیین کنید.

**پاسخ:** طول هر کدام از اضلاع مثلث را پیدا می کنیم:

$$A(2, 5), B(2, 1) \Rightarrow AB = |5 - 1| = 4$$

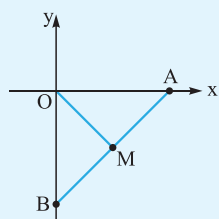
$$B(2, 1), C(6, 1) \Rightarrow BC = |6 - 2| = 4$$

$$A(2, 5), C(6, 1) \Rightarrow AC = \sqrt{(2-6)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

می بینیم که  $AB = BC$ ، پس مثلث متساوی الساقین است و از طرف دیگر  $AB^2 + BC^2 = AC^2$  چون  $4^2 + 4^2 = (4\sqrt{2})^2$ ، یعنی مثلث قائم الزاویه هم هست پس مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است.

## مثال و پاسخ

**مثال:** نقطه  $A$  به طول ۸ روی محور  $x$  ها و نقطه  $B$  به عرض ۶- روی محور  $y$  ها مفروض اند. اگر  $A$  و  $B$  و  $O$  سه رأس یک مثلث باشند، طول میانه  $OM$  را به دست آورید.



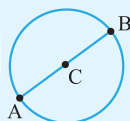
**پاسخ:** با توجه به شکل باید اول مختصات نقطه  $M$ ، وسط پاره خط  $AB$  را پیدا کنیم و بعد طول پاره خط  $OM$  را به دست آوریم:

$$A(8, 0), B(0, -6) \Rightarrow M \begin{vmatrix} \frac{8+0}{2} \\ \frac{0+(-6)}{2} \end{vmatrix} \Rightarrow M \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \end{vmatrix} \quad OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

## مثال و پاسخ

**مثال:** نقاط  $A(6, -1)$  و  $B(-2, 5)$  دو سر قطر یک دایره اند مختصات مرکز و طول شعاع دایره را پیدا کنید.

**پاسخ:** طبق شکل روبه رو مرکز دایره، نقطه وسط پاره خط  $AB$  است، پس:



$$A \begin{vmatrix} 6 \\ -1 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} -2 \\ 5 \end{vmatrix} \Rightarrow C_{\text{مرکز}} \begin{vmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{6 + (-2)}{2} \\ \frac{-1 + 5}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix}$$

از طرف دیگر طول پاره خط  $AB$  برابر قطر دایره است پس:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

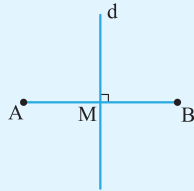
پس اندازه شعاع دایره برابر نصف قطر یعنی  $R = \frac{10}{2} = 5$  است.



## مثال و پاسخ

**مثال:** اگر  $A(2, -1)$  و  $B(4, 7)$  دو سر یک پاره خط باشند، معادله عمود منصف پاره خط  $AB$  را بنویسید.

**پاسخ:** می دانیم عمود منصف یک پاره خط، خطی است که از نقطه وسط پاره خط بر آن عمود می شود. پس باید مختصات نقطه  $M$  وسط پاره خط  $AB$  و شیب پاره خط  $AB$  را به دست آوریم و سپس معادله عمود منصف را بنویسیم:



$$A \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 4 \\ 7 \end{vmatrix} \Rightarrow M \begin{vmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3 \\ \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+7}{2} = 3 \end{vmatrix} \Rightarrow M \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7 - (-1)}{4 - 2} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow m_d = -\frac{1}{4} \quad (d \perp AB \text{ چون})$$

حالا با داشتن مختصات  $M$  و شیب عمود منصف، معادله عمود منصف را می نویسیم:

$$M \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix}, m_d = -\frac{1}{4} \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{4}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{15}{4}$$

## مثال و پاسخ

**مثال:** مختصات نقطه ای از محور طول ها را پیدا کنید که از دو نقطه  $A(-1, -1)$  و  $B(7, 7)$  به یک فاصله باشد.

**پاسخ:** **روش اول:** می دانیم نقاطی که از دو نقطه  $A$  و  $B$  به یک فاصله اند، روی عمود منصف پاره خط  $AB$  قرار دارند. پس باید معادله عمود منصف پاره خط  $AB$  را بنویسیم و بعد نقطه برخورد عمود منصف و محور  $x$  ها را پیدا کنیم:

$$A \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 7 \\ 7 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{\text{وسط } AB} \begin{vmatrix} \frac{-1+7}{2} = 3 \\ \frac{-1+7}{2} = 3 \end{vmatrix} \Rightarrow M \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7 - (-1)}{7 - (-1)} = 1 \Rightarrow m_{\text{عمود منصف}} = -1$$

$$M \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix}, m_d = -1 \Rightarrow y = -x + 6 \quad \text{معادله عمود منصف}$$

$$\begin{cases} y = -x + 6 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow -x + 6 = 0 \Rightarrow x = 6, y = 0 \Rightarrow C(6, 0)$$

حالا عمود منصف را با محور  $x$  ها قطع می دهیم:

نقطه  $C(6, 0)$  جواب سؤال است.

**روش دوم:** چون نقطه مورد نظر ( $C$ ) باید روی محور  $x$  ها باشد، پس مختصاتش به صورت  $C(x_1, 0)$  است از طرف دیگر باید  $AC = BC$

باشد پس:

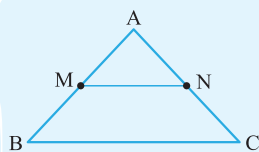
$$AC = BC \Rightarrow \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(-1 - x_1)^2 + (-1 - 0)^2} = \sqrt{(7 - x_1)^2 + (7 - 0)^2} \Rightarrow \sqrt{1 + 2x_1 + x_1^2 + 1} = \sqrt{49 - 14x_1 + x_1^2 + 49}$$

$$2 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1 + 2 = x_1^2 - 14x_1 + 98 \Rightarrow 16x_1 = 96 \Rightarrow x_1 = 6$$

پس مختصات نقطه  $C$  به صورت  $C(6, 0)$  است.

## مثال و پاسخ



**مثال:** نقاط  $A(2,3)$  و  $B(4,7)$  و  $C(6,1)$  سه رأس یک مثلث هستند. از نقطه  $M$  وسط ضلع  $AB$  به نقطه  $N$  وسط ضلع  $AC$  رسم می‌کنیم، طول پاره خط  $MN$  را پیدا کنید.

**پاسخ:** روش اول: مختصات  $M$  وسط  $AB$  و  $N$  وسط  $AC$  را پیدا و طول پاره خط  $MN$  را محاسبه می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} A \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 4 \\ 7 \end{vmatrix} &\Rightarrow M \begin{vmatrix} \frac{2+4}{2} \\ \frac{3+7}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix} \\ A \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}, C \begin{vmatrix} 6 \\ 1 \end{vmatrix} &\Rightarrow N \begin{vmatrix} \frac{2+6}{2} \\ \frac{3+1}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow MN = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} = \sqrt{(3-4)^2 + (5-2)^2} \\ = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

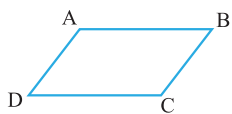
**روش دوم:** می‌دانیم پاره خطی که نقطه وسط ضلع  $AB$  را به نقطه وسط ضلع  $AC$  وصل می‌کند موازی ضلع  $BC$  و نصف آن است. پس می‌توانیم طول  $BC$  را محاسبه و بعد نصف کنیم:

$$B \begin{vmatrix} 4 \\ 7 \end{vmatrix}, C \begin{vmatrix} 6 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(4-6)^2 + (7-1)^2} \\ = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(2\sqrt{10}) = \sqrt{10}$$

**نکته:** برای پیدا کردن نقطه برخورد میانه‌های مثلث (مرکز ثقل مثلث) باید معادله دوتا از میانه‌ها را بنویسیم و محل تقاطعشان را مشخص کنیم. اما اگر این سؤال را در حالت کلی حل کنیم می‌بینیم که در یک مثلث با رئوس  $A, B$  و  $C$  مختصات نقطه برخورد میانه‌ها برابر است با:

$$G \text{ نقطه هم‌رسی میانه‌ها} \begin{vmatrix} \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{vmatrix}$$

**نکته:** در هر چهارضلعی که قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند (مثل متوازی‌الاضلاع، مستطیل، مربع، لوزی) مجموع طول‌ها و مجموع عرض‌های دو رأس مقابل با هم برابر است. یعنی به عنوان مثال اگر متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  به شکل روبه‌رو باشد داریم:



$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

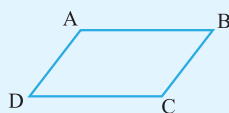
$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

## مثال و پاسخ

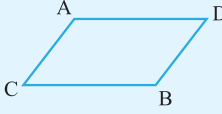
**مثال:** سه نقطه  $(2,1)$  و  $(-3,2)$  و  $(7,3)$  سه رأس یک متوازی‌الاضلاع‌اند. مختصات رأس چهارم را پیدا کنید.

**پاسخ:** چون در صورت سؤال مشخص نشده است که کدام رأس‌ها روبه‌روی هم هستند پس باید رأس‌ها را نام‌گذاری کنیم و تمام حالت‌هایی را که ممکن است این چهار رأس دوبه‌دو روبه‌روی هم باشند بررسی کنیم؛ پس اگر  $A(2,1)$  و  $B(-3,2)$  و  $C(7,3)$  سه رأس متوازی‌الاضلاع باشند و رأس چهارم را  $D$  بنامیم، داریم:

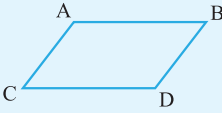
$$\left. \begin{aligned} A \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} -3 \\ 2 \end{vmatrix}, C \begin{vmatrix} 7 \\ 3 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 2+7 = (-3) + x_D \\ \Rightarrow x_D = 12 \\ y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 1+3 = 2 + y_D \\ \Rightarrow y_D = 2 \end{cases} \Rightarrow D \begin{vmatrix} 12 \\ 2 \end{vmatrix}$$







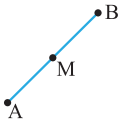
$\left. \begin{array}{l} \text{روبه‌روی هم } B, A \\ \text{روبه‌روی هم } D, C \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = x_C + x_D \Rightarrow 2 + (-3) = 7 + x_D \\ \Rightarrow x_D = -8 \\ y_A + y_B = y_C + y_D \Rightarrow 1 + 2 = 3 + y_D \\ \Rightarrow y_D = 0 \end{cases} \Rightarrow D \begin{vmatrix} -8 \\ 0 \end{vmatrix}$



$\left. \begin{array}{l} \text{روبه‌روی هم } D, A \\ \text{روبه‌روی هم } B, C \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_D = y_B + y_C \Rightarrow 2 + x_D = -3 + 7 \\ \Rightarrow x_D = 2 \\ y_A + y_D = y_B + y_C \Rightarrow 1 + y_D = 2 + 3 \\ \Rightarrow y_D = 4 \end{cases} \Rightarrow D \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix}$

### قرینه نقطه A نسبت به نقطه M

اگر دو نقطه  $A \begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix}$  و  $M \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$  را داشته باشیم و بخواهیم قرینه نقطه A نسبت به نقطه M پیدا کنیم طبق شکل زیر اگر این نقطه را B بنامیم نقطه M وسط پاره خط AB است، پس:



قرینه نقطه A نسبت به نقطه M برابر است با  $B \begin{vmatrix} 2\alpha - x_A \\ 2\beta - y_A \end{vmatrix}$

### مثال و پاسخ

**مثال:** قرینه نقطه (2, 5) را نسبت به نقطه M پیدا کنید.

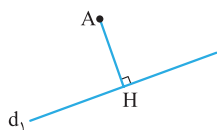
**پاسخ:** راه اول: از همان روشی که در بالا گفتیم استفاده می‌کنیم:

$$A \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} x_B \\ y_B \end{vmatrix}, \text{ وسط } M \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3 = \frac{2 + x_B}{2} \Rightarrow x_B + 2 = 6 \Rightarrow x_B = 4 \\ 1 = \frac{5 + y_B}{2} \Rightarrow y_B + 5 = 2 \Rightarrow y_B = -3 \end{cases} \Rightarrow B \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \end{vmatrix}$$

**راه دوم:** از روابطی که به دست آوردیم استفاده می‌کنیم:

$$A \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix}, M \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow B \begin{vmatrix} 2\alpha - x_A \\ 2\beta - y_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(3) - 2 \\ 2(1) - 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \end{vmatrix}$$

### فاصله نقطه از خط



فاصله نقطه A از خط به معادله  $ax + by + c = 0$  برابر طول پاره خط عمودی است که از A بر خط رسم می‌شود:

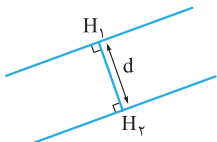
$$AH = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

این فاصله را از رابطه زیر پیدا می‌کنیم:

یعنی مختصات نقطه را در معادله خط قرار می‌دهیم (معادله‌ای که همه اجزای آن به یک طرف منتقل شده است) و حاصلش را داخل قدرمطلق می‌گذاریم و بر جذر مجموع مربع‌های ضریب x و ضریب y در معادله خط تقسیم می‌کنیم.

### فاصله دو خط موازی

اگر معادله دو خط موازی به صورت  $ax + by + c_1 = 0$  و  $ax + by + c_2 = 0$  باشد (دقت کنید که ضریب‌های x و y یکسان‌اند) فاصله این دو خط از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$H_1 H_2 = d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

## مثال و پاسخ

**مثال:** نقطه  $A(2, 3)$  به کدام خط زیر نزدیک تر است؟

$$d_1 = 3x + 4y - 7 = 0$$

$$d_2 = 4x + 3y - 1 = 0$$

**پاسخ:** فاصله نقطه  $A$  را از هر کدام از خطها پیدا می کنیم:

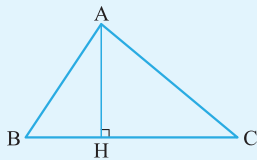
$$A(2, 3), d_1: 3x + 4y - 7 = 0 \Rightarrow AH = \frac{|3(2) + 4(3) - 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|6 + 12 - 7|}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}$$

$$A(2, 3), d_2: 4x + 3y - 1 = 0 \Rightarrow AH' = \frac{|4(2) + 3(3) - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|8 + 9 - 1|}{\sqrt{25}} = \frac{16}{5}$$

و چون  $\frac{11}{5} < \frac{16}{5}$  است، پس نقطه  $A$  به خط اول نزدیک تر است.

## مثال و پاسخ

**مثال:** نقاط  $A(2, 4)$  و  $B(3, 5)$  و  $C(1, 7)$  سه رأس یک مثلث اند. مساحت مثلث را پیدا کنید.



**پاسخ:** طبق شکل مقابل برای پیدا کردن مساحت مثلث باید طول ضلع  $BC$  و طول ارتفاع  $AH$  را پیدا کنیم و سپس از رابطه  $S = \frac{1}{2}(BC)(AH)$  مساحت را به دست آوریم. برای محاسبه طول  $BC$  داریم:

$$B \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix}, C \begin{vmatrix} 1 \\ 7 \end{vmatrix} \Rightarrow BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

و برای پیدا کردن طول ارتفاع  $AH$ ، باید معادله ضلع  $BC$  را بنویسیم و فاصله نقطه  $A$  را از این خط پیدا کنیم:

$$B \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix}, C \begin{vmatrix} 1 \\ 7 \end{vmatrix} \Rightarrow m_{BC} = \frac{7-5}{1-3} = -1 \Rightarrow y-7 = -1(x-1) \Rightarrow x+y-7-1=0 \Rightarrow x+y-8=0$$

$$A \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix} \Rightarrow AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1(2) + 1(4) - 8|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|2+4-8|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

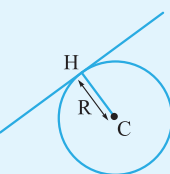
$$S = \frac{1}{2}(BC)(AH) = \frac{1}{2}(2\sqrt{2})\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = 2 \Rightarrow S = 2$$

پس مساحت مثلث برابر است با:

## مثال و پاسخ

**مثال:** نقطه  $C(2, -1)$  مرکز دایره ای است که بر خط به معادله  $y = \frac{3}{4}x$  مماس است. اندازه مساحت دایره را پیدا کنید.

**پاسخ:** طبق شکل روبه رو، چون شعاع نقطه مماس خط و دایره بر خط مماس عمود است پس اندازه شعاع دایره برابر فاصله نقطه



$$C(2, -1), y = \frac{3}{4}x \Rightarrow 4y = 3x \Rightarrow 3x - 4y = 0$$

از خط  $y = \frac{3}{4}x$  است:

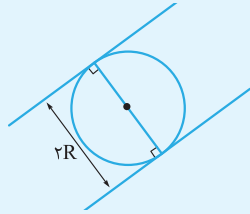
$$CH = R = \frac{|3(2) - 4(-1)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|6+4|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

و چون شعاع دایره  $R = 2$  است، پس مساحت دایره برابر است با  $S = \pi R^2 = 4\pi$ .

## مثال و پاسخ

**مثال:** دایره‌ای بر دو خط  $y = \frac{1}{4}x + 4$  و  $x - 2y - 2 = 0$  مماس است. اندازه شعاع دایره را پیدا کنید.

**پاسخ:** خط  $y = \frac{1}{4}x + 4$  که مرتب‌شده‌اش می‌شود  $2y = x + 8$  یا  $x - 2y + 8 = 0$  و خط  $x - 2y - 2 = 0$  با هم موازی‌اند. پس طبق شکل شعاع دایره برابر نصف فاصله بین این دو خط است.



$$\begin{cases} x - 2y + 8 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|8 - (-2)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

پس شعاع دایره برابر است با  $R = \frac{1}{2}(2\sqrt{5}) = \sqrt{5}$ .

## سؤال‌های امتحانی

۱- نقاط  $A(1, 6)$  و  $B(2, 3)$  و  $C(5, 9)$  سه رأس یک مثلث‌اند. ارتفاع گذرنده از رأس  $A$  را رسم می‌کنیم. نقطه برخورد ارتفاع با ضلع مقابل را پیدا کنید.

۲- نقاط  $A(1, -3)$  و  $B(1, 1)$  و  $C(4, 1)$  سه رأس یک مثلث‌اند. محیط مثلث را پیدا کنید.

۳- نقاط  $A(1, 2)$  و  $B(-1, 8)$  و  $C(-3, 4)$  سه رأس یک مثلث‌اند. معادله و طول میانه  $AM$  را پیدا کنید.

۴- نقاط  $A(2, 3)$  و  $B(3, 5)$  و  $C(-1, 7)$  سه رأس متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  هستند. مختصات رأس چهارم و محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید.

۵- قرینه نقطه  $A(3, 2)$  را نسبت به نقطه  $B(5, -1)$  پیدا کنید.

۶- نقطه‌ای روی محور  $y$ ‌ها بیابید که از دو نقطه  $A(1, -3)$  و  $B(5, 5)$  به یک فاصله باشد.

۷- مقدار  $a$  را طوری پیدا کنید که سه نقطه  $A(3, 4)$  و  $B(5, 8)$  و  $C(a, -2)$  روی یک خط راست باشند.

۸- نقاط  $A(-1, 2)$  و  $B(9, 2)$  دو سر قطر یک دایره‌اند. مختصات مرکز و شعاع دایره را پیدا کنید و مشخص کنید کدام یک از نقاط زیر روی دایره هستند:

۹- نقاط  $A(2, 0)$  و  $B(6, 2)$  و  $C(0, 2)$  سه رأس یک مثلث‌اند. محل برخورد عمود منصف‌های مثلث را پیدا کنید.

۱۰- اگر  $A(1, 2)$  مختصات یک رأس و  $3x + 4y + 4 = 0$  معادله یکی از اضلاع یک مربع باشد، محیط و مساحت مربع را پیدا کنید.

۱۱- نقطه  $A(-1, 1)$  یک رأس و نقطه  $M(2, 1)$  نقطه برخورد قطرهای یک مربع‌اند. مختصات سه رأس دیگر مربع را پیدا کنید.

۱۲- نقاط  $O(0, 0)$  و  $A(6, 0)$  دو رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند مختصات رأس سوم مثلث را پیدا کنید.

۱۳- از نقاط  $A(1, 0)$  و  $B(1, 1)$  هر کدام یک خط موازی خط  $y = \frac{3}{4}x$  رسم کرده‌ایم. مساحت مربعی را که دو ضلع مقابلش روی این دو خط قرار دارند پیدا کنید.

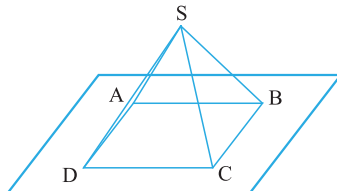
۱۴- نقاط  $A(3, -2)$  و  $B(8, 1)$  دو رأس مربع  $ABCD$  هستند. اگر رأس  $D$  روی محور  $y$ ‌ها واقع باشد، مختصات رأس  $C$  و  $D$  را پیدا کنید.

۱۵- نقاط  $A(-2, -1)$  و  $B(4, 5)$  و  $C(-1, 7)$  طبق شکل روی صفحه

مختصات واقع‌اند. مختصات نقطه  $D$  را چنان پیدا کنید که اگر از نقطه  $S$  خارج از صفحه‌ای

که این سه نقطه روی آن قرار دارند، چهار نخ به نقاط  $A, B, C$  و  $D$  وصل کنیم به طوری

که یک هرم منتظم ساخته شود.



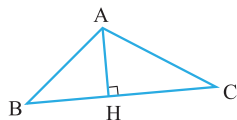
۱۶- نقاط  $A(2, 3)$  و  $B(3, 5)$  و  $C(-1, 7)$  سه رأس متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  هستند. مساحت متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید.

۱۷- طول و عرض جغرافیایی شهر  $A$ ،  $21^\circ$  درجه شرقی و  $13^\circ$  درجه شمالی و طول و عرض جغرافیایی شهر  $B$ ،  $66^\circ$  درجه شرقی و  $73^\circ$  درجه شمالی است. اگر مسافت فیزیکی هر درجه طول یا عرض جغرافیایی برابر  $110$  کیلومتر باشد، فاصله مستقیم این دو شهر را حساب کنید.

۱۸- نشان دهید دو نقطه  $M(a, b)$  و  $N(b, a)$  نسبت به خط  $y = x$  قرینه‌اند.

## پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- اگر یک مثلث فرضی رسم کنیم، می‌دانیم که برای پیدا کردن نقطه H یعنی محل برخورد ارتفاع AH با ضلع BC باید معادله AH و BC را در یک دستگاه حل کنیم؛ پس باید معادله BC و AH را بنویسیم:



$$BC: B(2, 3), C(5, 9) \Rightarrow m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{9 - 3}{5 - 2} = 2 \Rightarrow y - 3 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 1$$

$$AH \perp BC \Rightarrow m_{AH} = -\frac{1}{m_{BC}} = -\frac{1}{2}, A(1, 6) \Rightarrow AH: y - 6 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$$

حالا معادله AH و BC را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow 2x - 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}x = \frac{15}{2} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow H(3, 5)$$

۲- برای پیدا کردن محیط مثلث باید طول اضلاع آن را پیدا و با هم جمع کنیم:

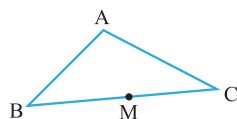
$$A(1, -3), B(1, 1) \Rightarrow AB = |y_A - y_B| = |-3 - 1| = 4$$

$$A(1, -3), C(4, 1) \Rightarrow AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(1 - 4)^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$B(1, 1), C(4, 1) \Rightarrow BC = |x_B - x_C| = |1 - 4| = 3$$

پس محیط مثلث برابر است با  $AB + AC + BC = 4 + 5 + 3 = 12$

۳- اگر یک مثلث فرضی رسم کنیم، می‌بینیم که M وسط BC است و برای پیدا کردن معادله و طول میانه AM اول باید مختصات نقطه M را پیدا کنیم.



$$B(-1, 8), C(-3, 4) \Rightarrow M \left( \frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right) \Rightarrow M \left( \frac{-1 - 3}{2}, \frac{8 + 4}{2} \right) \Rightarrow M(-2, 6)$$

حالا طول AM را پیدا می‌کنیم:

$$A(1, 2), M(-2, 6) \Rightarrow AM = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$A(1, 2), M(-2, 6) \Rightarrow m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{6 - 2}{-2 - 1} = -\frac{4}{3}$$

و برای پیدا کردن معادله میانه AM داریم:

$$AM: y - 2 = -\frac{4}{3}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$$

۴- چون A، B و C سه رأس متوالی متوازی‌الاضلاع ABCD هستند، پس رأس A مقابل رأس C و رأس B مقابل رأس D است؛ یعنی:

$$A(2, 3), B(3, 5), C(-1, 7)$$

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + (-1) = 3 + x_D \\ 3 + 7 = 5 + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = 5 \end{cases} \Rightarrow D(-2, 5)$$

$$O \left( \frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right) \Rightarrow O \left( \frac{2 + (-1)}{2}, \frac{3 + 7}{2} \right) \Rightarrow O \left( \frac{1}{2}, 5 \right)$$

محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع نقطه وسط دو رأس مقابل آن است، پس:

$$A \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 5 \\ -1 \end{vmatrix} \Rightarrow A' \begin{vmatrix} 2x_B - x_A \\ 2y_B - y_A \end{vmatrix} \Rightarrow A' \begin{vmatrix} 2(5) - 3 \\ 2(-1) - 2 \end{vmatrix} \Rightarrow A' \begin{vmatrix} 7 \\ -4 \end{vmatrix}$$

۵- از رابطه نقطه قرینه استفاده می‌کنیم:

۶- روش اول: چون نقطه مورد نظر روی محور  $y$ ‌ها است، پس طولش برابر صفر است و می‌توانیم مختصاتش را به شکل  $M(0, a)$  در نظر بگیریم:

$$A(1, -3), B(5, 5), MA = MB \Rightarrow \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(0-1)^2 + (a+3)^2} = \sqrt{(0-5)^2 + (a-5)^2} \xrightarrow{\text{توان}^2} 1 + (a+3)^2 = 25 + (a-5)^2$$

$$\Rightarrow 1 + a^2 + 6a + 9 = 25 + a^2 - 10a + 25 \Rightarrow 16a = 40 \Rightarrow a = \frac{40}{16} = \frac{5}{2} \Rightarrow M(0, \frac{5}{2})$$

روش دوم: چون قرار است فاصله نقطه  $M$  از نقاط  $A$  و  $B$  یکسان باشد، پس روی عمودمنصف پاره‌خط  $AB$  قرار دارد؛ یعنی می‌توانیم معادله عمودمنصف  $AB$  را بنویسیم و بعد محل برخوردش را با محور  $y$ ‌ها پیدا کنیم.

$$A(1, -3), B(5, 5) \Rightarrow N_{AB} \text{ وسط} \begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+5}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3+5}{2} \end{cases} \Rightarrow N \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$$

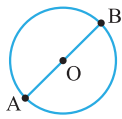
$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - (-3)}{5 - 1} = 2 \Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{معادله عمودمنصف: } y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{5}{2} \Rightarrow M(0, \frac{5}{2})$$

۷- اگر سه نقطه  $A(3, 4)$ ،  $B(5, 8)$  و  $C(a, -2)$  روی یک خط راست باشند، باید شیب  $AB$  و  $BC$  یکسان باشد؛ پس:

$$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{4-8}{3-5} = \frac{8-(-2)}{5-a} \Rightarrow 2 = \frac{10}{5-a} \Rightarrow 5-a=5 \Rightarrow a=0$$

۸- طبق شکل روبه‌رو مرکز دایره نقطه وسط قطر  $AB$  و طول شعاع دایره برابر نصف طول پاره‌خط  $AB$  است:



$$A(-1, 2), B(9, 2) \Rightarrow O \begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow O \begin{cases} \frac{-1+9}{2} \\ \frac{2+2}{2} \end{cases} \Rightarrow O(4, 2)$$

$$AB = |x_A - x_B| = |-1 - 9| = 10 \Rightarrow 2R = 10 \Rightarrow R = 5$$

برای آن‌که هر کدام از نقاط داده‌شده روی دایره باشد، باید فاصله‌اش تا مرکز دایره برابر شعاع دایره باشد. مرکز دایره نقطه  $O(4, 2)$  است، پس فاصله هر کدام از نقاط داده‌شده را از مرکز دایره حساب می‌کنیم:

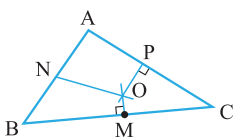
$$O(4, 2), M(7, 6): OM = \sqrt{(4-7)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{9+16} = 5 \checkmark$$

$$O(4, 2), N(1, -1): ON = \sqrt{(4-1)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} \times$$

$$O(4, 2), P(8, 5): OP = \sqrt{(4-8)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5 \checkmark$$

$$O(4, 2), Q(0, -6): OQ = \sqrt{(4-0)^2 + (2-(-6))^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} \times$$

۹- در شکل می‌بینیم که سه عمودمنصف مثلث در یک نقطه هم‌رس‌اند، پس برای پیدا کردن محل برخورد عمودمنصف‌ها باید معادله دوتا از آن‌ها را بنویسیم و با هم قطع دهیم. معادله عمودمنصف اضلاع  $AB$  و  $BC$  را می‌نویسیم:



$$A(2, 0), B(6, 2) \Rightarrow N_{AB} \text{ وسط} \begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+6}{2} = 4 \\ \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow N(4, 1)$$

$$m_{AB} = \frac{2-0}{6-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}} = -2 \Rightarrow y - 1 = -2(x - 4) \Rightarrow y = -2x + 9$$

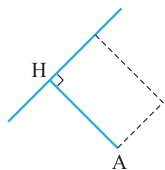
$$B(6,2), C(0,2) \Rightarrow M_{BC} \text{ وسط} \left| \begin{array}{l} \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{6+0}{2} = 3 \\ \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2+2}{2} = 2 \end{array} \right. \Rightarrow M(3,2)$$

$$m_{BC} = \frac{2-2}{6-0} = 0 \Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}} = \text{تعریف نشده} \Rightarrow \text{معادله عمودمنصف: } x = 3$$

$$\begin{cases} y = -2x + 9 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 3 \Rightarrow O(3,3)$$

حالا معادله دو عمودمنصف را با هم قطع می‌دهیم:

۱۰- طبق شکل چون مختصات  $A(1,2)$  در معادله  $3x + 4y + 4 = 0$  صدق نمی‌کند، پس نقطه  $A$  روی ضلع داده شده نیست و بنابراین فاصله نقطه  $A$  با خط داده شده برابر ضلع مربع است:

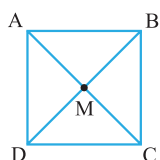


$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(1) + 4(2) + 4|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\text{محیط} = 4 \times 3 = 12$$

$$\text{مساحت} = 3^2 = 9$$

بنابراین محیط و مساحت مربع برابرند با:



۱۱- با استفاده از مختصات نقطه  $A(-1,1)$  و  $M(2,1)$  مختصات رأس  $C$  را می‌توانیم به راحتی حساب کنیم. چون  $M$  وسط  $AC$  است، پس  $C$  قرینه  $A$  نسبت به  $M$  است:

$$\begin{cases} x_C = 2x_M - x_A = 2(2) - (-1) = 5 \\ y_C = 2y_M - y_A = 2(1) - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow C(5,1)$$

برای پیدا کردن مختصات نقاط  $B$  و  $D$  می‌دانیم اولاً نقاط  $D$  و  $B$  روی عمودمنصف  $AC$  قرار دارند و ثانیاً فاصله نقطه  $B$  و  $D$  از نقطه  $M$  برابر اندازه  $AM$  یا  $CM$  است. برای اولاً داریم:

$$A(-1,1), C(5,1) \Rightarrow m_{AC} = 0 \Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}} = \text{تعریف نشده}, M(2,1) \Rightarrow \text{معادله عمودمنصف: } x = 2$$

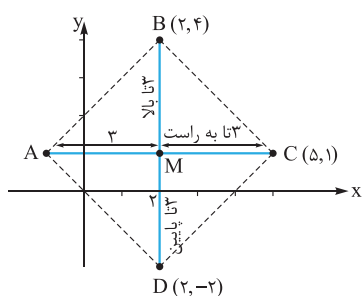
حالا باید نقطه‌ای روی خط  $x = 2$  پیدا کنیم که فاصله‌اش از نقطه  $M$  برابر  $AM$  باشد.  $AM$  برابر است با:

$$A(-1,1), M(2,1) \Rightarrow AM = |x_A - x_M| = |-1 - 2| = 3$$

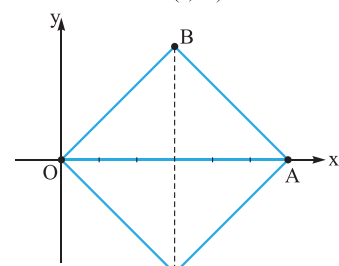
بنابراین اگر  $B$  یا  $D$  به صورت  $B(2,a)$  باشد (چون روی عمودمنصف واقع‌اند پس طولشان برابر ۲ است)، باید داشته باشیم:

$$BM = 3 \Rightarrow |y_B - y_M| = 3 \Rightarrow |y_B - 1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} y_B - 1 = 3 \Rightarrow y_B = 4 \\ y_B - 1 = -3 \Rightarrow y_B = -2 \end{cases}$$

پس مختصات نقاط  $B$  و  $D$  به صورت  $B(2,4)$  و  $D(2,-2)$  است.



**نکته:** این سؤال با کمک شکل خیلی سریع‌تر حل می‌شود:



۱۲- طبق شکل مقابل چون قرار است مثلث  $OAB$  متساوی‌الاضلاع باشد، نقطه  $B$  باید روی

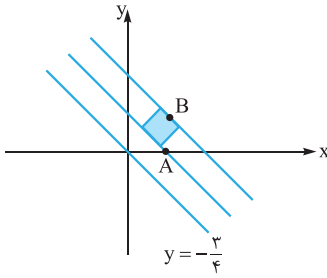
عمودمنصف ضلع  $OA$  قرار داشته باشد؛ یعنی از همین اول مشخص است که مسئله دو جواب دارد و نقطه  $B$  می‌تواند با عرض مثبت یا با عرض منفی (روی شکل نقطه  $D$ ) باشد. طول نقطه  $B$  برابر ۳ است، پس می‌توانیم آن را به صورت  $B(3,a)$  در نظر بگیریم. از طرف دیگر فاصله  $O$  تا  $B$  یعنی طول پاره خط  $OB$  باید برابر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع یعنی برابر ۳ باشد، پس:

$$O(0,0), B(3,a), OB = 3 \Rightarrow \sqrt{(x_O - x_B)^2 + (y_O - y_B)^2} = 3 \Rightarrow \sqrt{(0-3)^2 + (0-a)^2} = 3$$

$$\xrightarrow{\text{توان}} 9 + a^2 = 9 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

پس مختصات رأس سوم  $B(3,3\sqrt{3})$  و یا  $D(3,-3\sqrt{3})$  است.





۱۳- طبق شکل روبه‌رو اندازه ضلع مربع برابر است با فاصله دو خط موازی، پس اول معادله خط‌هایی را که از نقاط  $A(1,0)$  و  $B(1,1)$  موازی خط  $y = -\frac{3}{4}x$  رسم می‌شوند، می‌نویسیم:

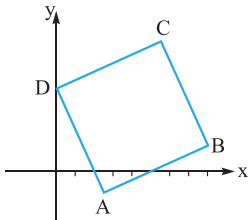
$$A(1,0), m = -\frac{3}{4} \Rightarrow y - 0 = -\frac{3}{4}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \Rightarrow 4y = -3x + 3 \Rightarrow 3x + 4y - 3 = 0$$

$$B(1,1), m = -\frac{3}{4} \Rightarrow y - 1 = -\frac{3}{4}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4} \Rightarrow 4y = -3x + 7 \Rightarrow 4y + 3x - 7 = 0$$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-3 - (-7)|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{4}{5}$$

حالا فاصله این دو خط موازی را پیدا می‌کنیم:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$



۱۴- رأس  $A(3, -2)$  و  $B(8, 1)$  را داریم، پس اول رأس  $D$  را پیدا می‌کنیم. چون رأس  $D$  روی محور  $y$ ها است، پس می‌توانیم  $D$  را به مختصات  $D(0, a)$  در نظر بگیریم.

طول پاره‌های  $AB$  و  $AD$  باید با هم برابر باشد، چون هر دو ضلع مربع‌اند، پس:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(3 - 8)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

$$AD = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (-2 - a)^2} = \sqrt{9 + a^2 + 4a + 4}$$

$$\sqrt{a^2 + 4a + 13} = \sqrt{34} \xrightarrow{\text{توان } 2} a^2 + 4a + 13 = 34 \Rightarrow a^2 + 4a - 21 = 0 \Rightarrow (a + 7)(a - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ a = 3 \end{cases}$$

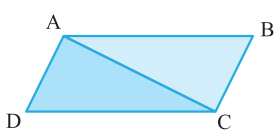
پس باید داشته باشیم:

که با توجه به شکل  $a = 3$  قابل قبول است، پس مختصات  $D$  به صورت  $D(0, 3)$  است. حالا رأس  $C$  را با توجه به این که مربع یک متوازی‌الاضلاع است، پیدا می‌کنیم:

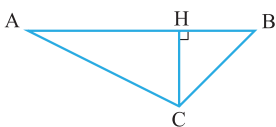
$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + x_C = 8 + 0 \Rightarrow x_C = 5 \\ -2 + y_C = 1 + 3 \Rightarrow y_C = 6 \end{cases} \Rightarrow C(5, 6)$$

۱۵- برای این که هرم ساخته شده منظم باشد باید چهارضلعی  $ACBD$  متوازی‌الاضلاع باشد، پس:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 - 1 = 4 + x_D \Rightarrow x_D = -7 \\ -1 + 7 = 5 + y_D \Rightarrow y_D = 1 \end{cases} \Rightarrow D(-7, 1)$$



۱۶- طبق شکل روبه‌رو مساحت متوازی‌الاضلاع دو برابر مساحت مثلث  $ABC$  است، پس لازم نیست رأس چهارم متوازی‌الاضلاع را پیدا کنیم بلکه کافی است مساحت مثلث  $ABC$  را پیدا و دو برابر کنیم.



برای پیدا کردن مساحت مثلث  $ABC$ ، با رئوس  $A(2, 3)$ ،  $B(5, 3)$  و  $C(-1, 7)$ ، طول قاعده  $AB$  و طول ارتفاع  $AH$  را پیدا می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2 - 5)^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{9 + 0} = \sqrt{9} = 3$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 3}{5 - 2} = 0 \Rightarrow y - 3 = 0(x - 2) \Rightarrow y = 3 \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$$

$$CH = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(-1) - (7) - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

حالا فاصله  $C$  را از خط  $AB$  پیدا می‌کنیم:

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2} AB \times CH = \frac{1}{2} (3) \times \frac{10}{\sqrt{5}} = 5$$

پس مساحت مثلث  $ABC$  برابر است با:

$$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} = 2 \times 5 = 10$$

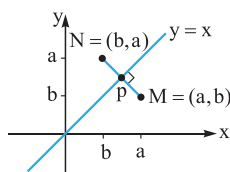
و در نتیجه مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با:

۱۷- فاصله دو نقطه  $A(21, 13)$  و  $B(66, 73)$  را حساب و در عدد ۱۱۰ ضرب می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(21 - 66)^2 + (13 - 73)^2} = \sqrt{45^2 + 60^2} = \sqrt{15^2(3^2 + 4^2)} = 15\sqrt{9 + 16} = 15 \times 5 = 75$$

۷۵ × ۱۱۰ = ۸۲۵۰ کیلومتر

پس فاصله دو شهر برحسب کیلومتر برابر است با:



۱۸- روش اول: برای آن که نشان دهیم دو نقطه  $M(a, b)$  و  $N(b, a)$  نسبت به خط  $y = x$  قرینه‌اند،

نشان می‌دهیم اولاً پاره خط  $MN$  بر خط  $y = x$  عمود است و ثانیاً نقطه وسط پاره خط  $MN$  روی خط

$y = x$  قرار دارد:

$$\text{پاره خط } AB \text{ بر خط } y = x \text{ عمود است.} \Rightarrow m_{MN} = \frac{b-a}{a-b} = -1 \Rightarrow \text{اولاً}$$

$$\begin{aligned} \text{نقطه } P \text{ روی خط } y = x \text{ قرار دارد.} \Rightarrow P\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{a+b}{2} \\ \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{b+a}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

روش دوم: اگر دو نقطه  $M$  و  $N$  نسبت به خط  $y = x$  قرینه باشند، خط  $y = x$  باید عمودمنصف پاره خط  $MN$  باشد؛ یعنی باید فاصله هر نقطه

دلخواه از خط  $y = x$  از دو نقطه  $M$  و  $N$  یکی باشد. نقاط روی خط  $y = x$  دارای مختصات به شکل  $Q(t, t)$  هستند، پس:

$$MQ = \sqrt{(x_M - x_Q)^2 + (y_M - y_Q)^2} = \sqrt{(a - t)^2 + (b - t)^2}$$

$$NQ = \sqrt{(x_N - x_Q)^2 + (y_N - y_Q)^2} = \sqrt{(b - t)^2 + (a - t)^2}$$

همان‌طور که می‌بینیم  $MQ = NQ$  است؛ یعنی خط  $y = x$  عمودمنصف پاره خط  $MN$  است.

۱۹- در هر کدام از معادله‌ها، مجهول معادله دارای یک توان و توان دو برابر آن است، توان کوچک‌تر را برابر  $u$  فرض می‌کنیم و معادله را حل می‌کنیم:

$$\text{الف) } x^4 - x^2 - 12 = 0 \xrightarrow{x^2=u} u^2 - u - 12 = 0 \Rightarrow (u-4)(u+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u=4 \\ u=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \\ x^2=-3 \Rightarrow \text{غ ق} \end{cases}$$

$$\text{ب) } x^4 - 2 \cdot x^2 + 64 = 0 \xrightarrow{x^2=u} u^2 - 2u + 64 = 0 \Rightarrow (u-4)(u-16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u=4 \\ u=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \\ x^2=16 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-4 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{پ) } x^6 + 9x^3 + 8 = 0 \xrightarrow{x^3=u} u^2 + 9u + 8 = 0 \Rightarrow (u+1)(u+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u=-1 \\ u=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-2 \end{cases} \\ x^3=-8 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{ت) } x^8 - 17x^4 + 16 = 0 \xrightarrow{x^4=u} u^2 - 17u + 16 = 0 \Rightarrow (u-1)(u-16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u=1 \\ u=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \\ x^4=16 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \end{cases}$$

۲۰- باز هم در هر کدام از معادله‌ها یک توان از  $x$  و توان دو برابرش را داریم. توان کوچک‌تر را برابر  $u$  فرض می‌کنیم و معادله را حل می‌کنیم:

$$\text{الف) } x + 2\sqrt{x} - 8 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=u} u^2 + 2u - 8 = 0 \Rightarrow (u+4)(u-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u=-4 \\ u=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=-4 \Rightarrow \text{غ ق} \\ \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

$$\text{ب) } x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{6}} - 6 = 0 \xrightarrow{x^{\frac{1}{6}}=u} u^2 - u - 6 = 0 \Rightarrow (u-3)(u+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u=3 \\ u=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{\frac{1}{6}}=3 \Rightarrow x=3^6=729 \\ x^{\frac{1}{6}}=-2 \Rightarrow \text{غ ق} \end{cases}$$



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی**

**سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور**

**نمونه سوالات امتحانات ریاضی**

**نرم افزارهای ریاضیات**

...و

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)